

Curs 11

Intervale de încredere

Am văzut cum poate fi estimat un parametru folosind datele furnizate de un eșantion. Parametrul din populație nu este, în general, egal cu statistica calculată cu ajutorul eșantionului. Ne punem problema cât este de bună această estimare, adică vom calcula așa numita marjă de eroare.

Presupunem că studiem vâscozitatea unei anumite substanțe. Prin studierea unui eșantion s-a constatat că media acestei caracteristici este $\hat{\mu} = \bar{x} = 1000$. Dacă considerăm un alt eșantion este aproape imposibil să obținem aceeași estimare numerică pentru media vâscozității. Nu putem spune nimic despre relația dintre cele două medii. Problema pe care o punem este următoarea: valoarea reală a vâscozității este cuprinsă între 900 și 1100 sau între 990 și 1100? Răspunsul la această întrebare afectează deciziile ulterioare legate de acest proces. Marginile unui interval plauzibil pentru valorile mediei constituie un interval estimat.

Acest interval unde bănuim că este situată valoarea reală a parametrului populației studiate se numește *interval de încredere*. Intervalul de încredere constă din:

- *un interval*, obținut cu ajutorul datelor furnizate de o selecție,
- *un nivel de încredere*, care reprezintă probabilitatea ca intervalul să acopere valoarea reală a parametrului.

Nivelul de încredere se precizează. De regulă se consideră 0.90 sau mai mult. Se dă de obicei α , unde nivelul de încredere este $1 - \alpha$ (0.95 corespunde pragului de semnificație $\alpha = 0.05$).

Definiția 11.0.1 *Se numește interval de încredere pentru un parametru θ asociat unei populații orice interval $I = [a, b]$ pentru care se poate estima probabilitatea ca $\theta \in I$. Dacă α este un număr cuprins între 0 și 1 și dacă $P(\theta \in I) \geq 1 - \alpha$, se spune că I este un interval de încredere pentru θ cu un nivel de încredere $1 - \alpha$ (sau echivalent, cu un nivel de încredere $(1 - \alpha) 100\%$ sau cu eroare sub $\alpha 100\%$).*

În cele ce urmează vom construi intervale de încredere numai pentru caracteristici care urmează o distribuție normală

11.1 Intervale de încredere pentru medie în cazul σ cunoscut

Presupunem că realizăm o selecție populație a cărei caracteristică studiată urmează o distribuție normală, $N[m, \sigma]$, cu σ cunoscut, m necunoscut. Situația este mai puțin întâlnită în realitate deoarece în mod normal atât media cât și dispersia sunt necunoscute. Totuși vom prezenta în continuare și acest caz.

11.1.1 Construcția intervalului de încredere

Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile variabilelor de selecție X_1, X_2, \dots, X_n obținute dintr-o populație care urmează o distribuție normală, $N[m, \sigma]$, $\sigma > 0$ cunoscut, m necunoscut. Știm că $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N([0, 1])$. Din această cauză putem scrie, (evident $z > 0$),

$$P(|Z| \leq z) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha = P\left(m \in \left[\bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \Leftrightarrow \\ 1 - \alpha = \Phi(z) - \Phi(-z) \Leftrightarrow 1 - \alpha = 1 - 2\Phi(-z) \Leftrightarrow \Phi(-z) = \frac{\alpha}{2}$$

Notăm cu $z_{\frac{\alpha}{2}}$ valoarea (pozitivă) a lui z obținută din relația $\Phi(-z) = \frac{\alpha}{2}$. Pentru determinarea acestei valori se folosește tabelul pentru funcția lui Laplace (a se vedea Anexa 1) sau programele Matlab sau Mathematica.

De îndată ce selecția a fost realizată și a fost calculată media de selecție $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ se obține intervalul,

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \quad (11.1)$$

Suntem tentați să spunem că $1 - \alpha$ este probabilitatea ca acest interval să cuprindă valoarea exactă a lui m , dar această afirmație nu este corectă. Trebuie să ținem seama de faptul că intervalul de încredere este un interval aleator, el depinde de selecția făcută, deci extremitățile sale sunt v. a. Prin urmare interpretarea corectă a lui $1 - \alpha$ este următoarea: dacă, facem un număr foarte mare de selecții și calculăm de fiecare dată intervalul de încredere cu nivelul de încredere $1 - \alpha$, atunci $(1 - \alpha) 100\%$ din aceste intervale vor conține valoarea exactă pentru m .

Observăm că intervalul de încredere pentru m este centrat în estimăția punctuală \bar{x} . Când n crește se obține un *interval mai scurt* pentru același coeficient de încredere. Un interval de încredere mai scurt indică o mai mare încredere în \bar{x} ca estimăție a lui m .

Reluăm exemplul ?? din capitolul 6.

Exemplul 11.1.1 Punctajele obținute de studenți care au promovat examenul de matematică și care cuantifică cunoștințele lor sunt:

{64, 62, 76, 82, 66, 76, 72, 71, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 78, 80, 79, 84, 83, 82, 66, 68, 68, 82, 84, 78, 76, 69, 77, 58, 62, 82, 85, 58, 78, 84, 94, 88, 77, 78, 88, 91, 70, 71, 78, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 71, 66, 68, 71, 73, 70, 85, 78, 65, 54, 51, 78, 89, 66, 68, 95, 94, 99, 81, 81, 92, 88, 99, 81, 81}.

Se presupune că se cunoaște $\sigma = 10.99$. Să se construiască intervalele de încredere pentru medie cu nivelele de încredere de 90%, 95% și 99%.

Rezolvare. Am calculat $\bar{x} = \frac{1}{83} \sum_{i=1}^{83} x_i = 75.0602$.

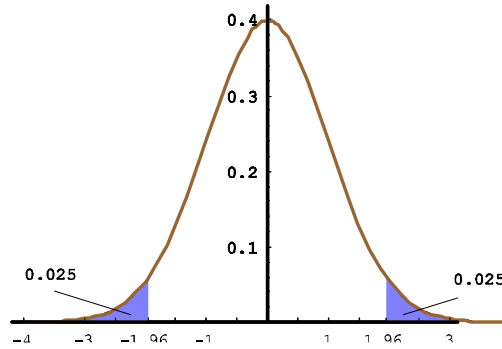
Calculăm intervalele de încredere cu nivelul de încredere de 90%, 95% și 99%.

Pentru 90% avem $\alpha = 0.1$ și

$$\Phi(-z) = 0.05 \Rightarrow -z = -1.6449 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.6449.$$

Atunci, conform (11.1), intervalul

$$I = \left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [73.0760; 77.0445].$$



este un interval de încredere pentru m cu 90% nivel de încredere.

Pentru 95% avem $\alpha = 0.05$ și $\Phi(-z) = 0.025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9599$. Intervalul de încredere pentru m este

$$I = \left[\bar{x} - 1.9599 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.9599 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [72.6960; 77.4245].$$

Pentru 99% avem $\alpha = 0.01$ și $\Phi(-z) = 0.005 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.5758$, intervalul de încredere pentru m este

$$I = \left[\bar{x} - 2.5758 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 2.5758 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [71.9530; 78.1675].$$

Observăm că dacă, de exemplu, nivelul de încredere este 0.95, atunci $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9599$ trebuie să lase la dreapta sa o arie egală cu $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, iar la stânga o arie egală cu $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 = 0.975$.

Această modalitate de determinare a intervalului de încredere se poate sintetiza în **testul Z**.

Algoritm testului Z

Presupunem dată o selecție de valori independente (de volum n) dintr-o populație de medie m necunoscută și dispersie σ^2 ($\sigma > 0$) cunoscută.

Pasul 1. Se calculează \bar{x} .

Pasul 2. Se consideră statistica $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ se determină $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Comparăm intervalele obținute în exemplul de mai sus în funcție de nivelul de încredere

$(1 - \alpha) \cdot 100\%$	$\frac{\alpha}{2}$	$z_{\frac{\alpha}{2}}$	$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
90%	0.05	1.6449	[73.0760; 77.0445]
95%	0.025	1.9599	[72.6960; 77.4245]
99%	0.005	2.5758	[71.9530; 78.1675]

Din tabel se observă că lungimea intervalului este invers proporțională cu nivelul de încredere.

Am putea spune că 95% dintre studenți au punctajele cuprinse în intervalul [72.6960; 77.4245]? Această interpretare nu este corectă deoarece valoarea exactă a mediei nu este cunoscută și afirmația $m \in [72.6960; 77.4245]$ poate fi corectă sau nu deoarece intervalul de încredere construit este aleator, el bazându-se pe o selecție aleatoare.

Interpretarea corectă este: dacă facem un număr mare de selecții și de fiecare dată calculăm intervalul de încredere pentru medie cu nivelul de încredere de 95%, atunci în 95% din aceste intervale vor conține valoarea corectă a mediei. Deci metoda folosită ne permite să obținem intervale pentru medie care vor conține în 95% din cazuri valoarea corectă.

Alegerea nivelului de încredere este arbitrară. Ne punem problema ce se întâmplă dacă mărim nivelul de încredere, de exemplu, la 99%? Este rezonabil să dorim să mărim nivelul de încredere. În acest caz, pentru exemplul considerat, intervalul de încredere va fi [71.9530; 78.1675], deci va fi mai mare decât în cazul nivelului de 95%. Dacă dimensiunea eșantionului și abaterea medie pătratică sunt păstrate constante, atunci un nivel mai înalt de încredere atrage un interval de încredere mai mare.

Lungimea intervalului de încredere este o măsură a preciziei estimării. Din cele prezentate rezultă că precizia este invers proporțională cu nivelul de încredere. Este preferabil să obținem un interval de încredere cât mai scurt pentru o problema pusă, dar cu un nivel de încredere adecvat. Un mod de a atinge acest scop este alegerea dimensiunii eșantionului astfel încât cu ajutorul acestei selecții să putem obține un interval de încredere de lungime specificată și cu nivelul de încredere dat.

Intervalele de încredere studiate până acum sunt bilaterale în sensul că dădeau ca rezultat un interval închis. Dacă există o informație relativă la valoarea medie de forma că aceasta nu este limitată superior, atunci intervalul de încredere devine de forma $\left(\bar{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ și este un interval de încredere unilateral.

În acest caz

$$P(Z > -z) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(m \in \left(\bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty\right)\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 1 - \Phi(-z) = 1 - \alpha \Leftrightarrow \Phi(-z) = \alpha$$

Notăm cu z_α valoarea obținută din relația $\Phi(-z) = \alpha$.

O situație similară are loc dacă valoarea medie nu este limitată inferior, intervalul de încredere fiind $\left(-\infty, \bar{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, iar valoarea z_α se obține din relația $\Phi(z) = 1 - \alpha$.

11.2 Intervale de încredere pentru medie în cazul σ necunoscut

Presupunem că populația studiată are o distribuție normală cu media m și dispersia σ^2 necunoscute. Facem o selecție de dimensiune n . Fie x_1, x_2, \dots, x_n valorile variabilelor de selecție X_1, X_2, \dots, X_n . Putem calcula media de selecție $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ și dispersia de selecție modificată $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Vrem să calculăm un interval de încredere pentru m . Dacă dispersia este cunoscută, știm că $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ urmează o distribuție normală. Dacă σ este necunoscut o procedură normală

este de a înlocui σ cu s . Statistica devine acum $T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$. O întrebare logică care se pune este următoarea: care este efectul înlocuirii lui σ cu s asupra distribuției statisticii T ? Dacă n este suficient de mare, răspunsul la această întrebare este: efectul este "destul de mic" și putem considera că urmează o distribuție normală standard. În general n trebuie să fie cel puțin 40. Teorema limită centrală are loc pentru $n \geq 30$, dar mărirea eșantionului recomandată este la cel puțin 40, deoarece înlocuirea lui σ cu s în Z conduce la modificări suplimentare ale distribuției.

În acest caz intervalul de încredere se construiește astfel:

Pasul 1. Se calculează $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ și $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Pasul 2. Se consideră statistica $Z = \frac{\bar{x} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ se determină $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m ,

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} \right].$$

Dacă n este mic, cum se întâmplă în multe probleme din inginerie, trebuie folosită distribuția Student pentru construirea intervalului de încredere.

Testul Student

Presupunem că populația studiată are o distribuție normală cu media m și abaterea medie pătratică σ necunoscute. Facem o selecție de dimensiune n , n mic. Vrem să calculăm un interval de încredere pentru m .

Teorema 11.2.1 *Fie X_1, X_2, \dots, X_n independente, care urmează o distribuție normală cu media m și dispersia σ^2 . Fie x_1, x_2, \dots, x_n , $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ și fie $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, unde \bar{x} reprezintă media de selecție, s reprezintă abaterea medie de selecție. Statistica $T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ urmează o distribuție Student cu $n - 1$ grade de libertate.*

În tabelul din Anexă pentru funcția de repartiție a distribuției Student pe prima linie sunt date valorile lui α iar pe coloană sunt trecute gradele de libertate. Astfel calculăm

$$F(t_{\alpha,n}) = P(T \leq t_{\alpha,n}) = \int_{-\infty}^{t_{\alpha,n}} f(x) dx = 1 - \alpha,$$

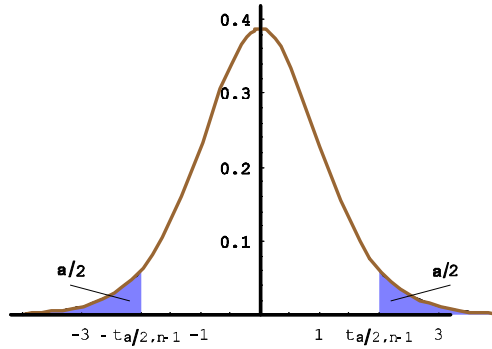
unde $f(x)$ este densitatea de probabilitate a distribuției Student.

Pentru valorile negative se folosește faptul că

$$F(-t_{\alpha,n}) = 1 - F(t_{\alpha,n}). \quad (11.2)$$

Deoarece distribuția Student este simetrică, avem $t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$, ceea ce înseamnă că în partea dreaptă a lui $t_{\alpha,n}$, dar și în partea stângă a lui $t_{1-\alpha,n}$, aria este α .

Pentru orice $\alpha \in (0, 1)$ se poate determina pragul $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} > 0$ astfel încât $P(|T_{n-1}| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \alpha$. Se alege $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ astfel încât ariile colorate din figură. să fie fiecare $\frac{\alpha}{2}$.



Înlocuind $T_{n-1} = \frac{(\bar{X} - m) \sqrt{n}}{s}$, rezultă

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq \frac{(\bar{X} - m) \sqrt{n}}{s} \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$P\left(m \in \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

Rezultă că intervalul

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right]$$

este un interval de încredere pentru media m cu coeficientul de încredere $100(1 - \alpha)\%$.

Algoritmul testului Student (mai este cunoscut sub denumirea de **testul T**)

Fie x_1, x_2, \dots, x_n o selecție de variabile de selecție X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. dintr-o populație normală cu media m și dispersia σ^2 necunoscute.

Pasul 1. Se calculează $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ și $s = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pasul 2. Se consideră statistica $T = \frac{\bar{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$.

Pasul 3. Pentru un coeficient de încredere prescris $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ se determină din tabelul funcției de repartiție Student sau cu ajutorul softurilor numărul $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} > 0$ astfel încât $P(|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}) = 1 - \alpha$.

Pasul 4. Se determină intervalul de încredere pentru m ,

$$\left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}, \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right].$$

Exemplul 11.2.2 Considerăm un eșantion de 36 studenți care au obținut punctajele:

64, 62, 76, 82, 66, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 80, 79, 84, 83, 62, 78, 84, 94, 88, 77, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 78, 98.

Să se stabilească intervale de 90%, 95% și 99% încredere pentru media punctajelor obținute.

Rezolvare. Folosim testul Z.

Rezultă $\bar{x} = 73.7778$, $\sigma \simeq s = 11.6082$.

Statistica T este distribuită Student cu 35 grade de libertate (a se consulta anexa 2 cu tabelul valorilor funcției de repartiție Student în funcție de gradele de libertate).

Pentru 90% încredere (deci eroare sub 10%) avem $t_{0.05} = 1.68957$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 1.68957 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică [70.509; 77.0466].

Pentru 95% încredere (deci eroare sub 5%) avem $t_{0,025} = 2.03011$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 2.03011 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică [69.8501; 77.7054]

Pentru 99% încredere (deci eroare sub 1%) avem $t_{0,005} = 2.72381$. Intervalul cerut are capetele $73.7778 \pm 2.72381 \cdot \frac{11.6082}{\sqrt{36}}$, adică [68.5081; 79.0475]

Și în acest caz putem construi intervale de încredere de forma $\left(\bar{x} - t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \infty\right)$ sau $\left(-\infty, \bar{x} + t_{\alpha, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$ pentru intervale de încredere unilaterale.

11.3 Intervale de încredere pentru dispersie

Uneori este necesar calculul intervalului de încredere pentru dispersia unei caracteristici studiate. Dacă populația este modelată de o distribuție normală putem aplica intervalele descrise în continuare.

Teorema 11.3.1 Fie variabilele de selecție X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. (independente și identic distribuite) cu $X \in N(m, \sigma)$, media m și dispersia σ^2 necunoscute. Statistica

$$\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

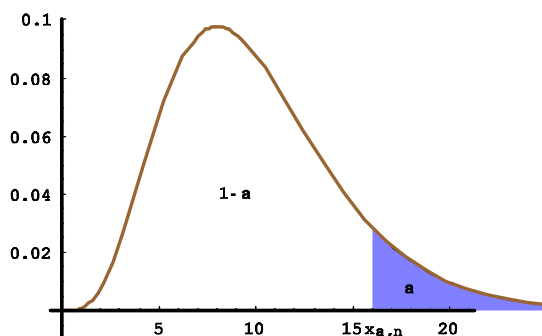
urmează o distribuție hi-pătrat cu $n - 1$ grade de libertate.

Definim $x_{\alpha, n}$ ca fiind punctul pentru care este satisfăcută inegalitatea

$$P(\chi^2 \leq x_{\alpha, n}) = \int_{-\infty}^{x_{\alpha, n}} f(t) dt = 1 - \alpha, \quad (11.3)$$

unde $f(t)$ este densitatea de probabilitate a distribuției $\chi^2(n)$.

Probabilitatea căutată este aria situată la stânga lui $x_{\alpha, n}$ din figura următoare.



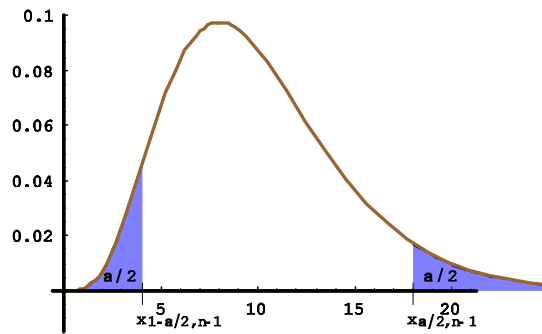
Pentru a ilustra modul de utilizare a tabelului de valori ale funcției de repartiție hi-pătrat observăm că pe prima coloană sunt trecute gradele de libertate iar pe linie sunt trecute valorile lui α . De exemplu, pentru $n = 10$ și $\alpha = 0.05$ obținem $x_{0.05, 10} = 18.31$, iar $x_{1-0.05, 10} = 3.94$.

Deci $P(\chi^2 \leq x_{0.05, 10}) = 1 - 0.05$, $P(\chi^2 \leq x_{0.95, 10}) = 0.05$, $x_{0.05, 10} = 18.31$, iar $x_{1-0.05, 10} = 3.94$. \diamond

Pentru construcția intervalului de încredere pentru dispersie se folosește statistica $\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2(n-1)$. Pentru $\alpha \in (0, 1)$ dat determinăm $x_1(\alpha)$ și $x_2(\alpha)$ astfel încât

$$P(x_1(\alpha) \leq \chi_{n-1}^2 \leq x_2(\alpha)) = 1 - \alpha. \quad (11.4)$$

Numerele $x_1(\alpha)$ și $x_2(\alpha)$ nu sunt unic determinate și de obicei se aleg astfel încât $x_1(\alpha) = x_{1-\alpha/2, n-1}$ și $P(\chi_{n-1}^2 \leq x_{1-\alpha/2, n-1}) = \frac{\alpha}{2}$, iar $x_2(\alpha) = x_{\alpha/2, n-1}$ și $P(\chi_{n-1}^2 \geq x_{\alpha/2, n-1}) = \frac{\alpha}{2}$. Semnificația valorilor $x_{1-\alpha/2, n-1}$ și $x_{\alpha/2, n-1}$ poate fi văzută în figura următoare.



Înlocuind $\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ în (11.4) și obținem:

$$P\left(x_{1-\alpha/2, n-1} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq x_{\alpha/2, n-1}\right) = 1 - \alpha. \quad (11.5)$$

Relația (11.5) poate fi rearanjată astfel:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}}\right) = 1 - \alpha. \quad (11.6)$$

Am obținut astfel un interval de încredere pentru dispersie.

Algoritmul de determinare a intervalului de încredere pentru dispersie

Fie x_1, x_2, \dots, x_n o selecție de valori pentru variabilele de selecție X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. dintr-o populație normală cu media m și dispersia σ^2 necunoscute.

Pasul 1. Se calculează $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ și $s = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Pasul 2. Se alege statistica $\chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ despre care se știe că urmează o distribuție χ^2 cu $n-1$ grade de libertate.

Pasul 3. Pentru un nivel de încredere prescris $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ se determină, din tabelul valorilor funcției de repartiție χ^2 cu $n-1$ grade de libertate sau cu ajutorul softurilor Matlab sau Mathematica, numerele $x_{1-\alpha/2, n-1}$ și $x_{\alpha/2, n-1}$ astfel încât

$$P(\chi_{n-1}^2 \leq x_{1-\alpha/2, n-1}) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{și} \quad P(\chi_{n-1}^2 \leq x_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Pasul 4. Se determină intervalul $\left[\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2, n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}}\right]$ și rezultă intervalul de încredere pentru σ^2 .

Observația 11.3.2 Este posibil să determinăm intervale nemărginite inferior sau superior pentru dispersie cu un anumit nivel de încredere $(1-\alpha)$ 100%. Acestea sunt $\left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha, n-1}}\right)$, respectiv $\left(\frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha, n-1}}, \infty\right)$.

Exemplul 11.3.3 Reluăm Exemplul 11.1.1. Dorim să construim intervale de încredere pentru dispersie.

Rezolvare. Avem $n = 83$. Calculăm $s = 11.3517$. Considerăm statistica $\chi_{82}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{82s^2}{\sigma^2}$.

Pentru nivelul de încredere de 90% avem $x_{0.95, 83} = 62.1323$ și $x_{0.05, 83} = 104.139$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[101.468, 170.068]$.

Pentru nivelul de încredere de 95% avem $x_{0.975, 83} = 58.8446$ și $x_{0.025, 83} = 108.937$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[96.998, 179.57]$.

Pentru nivelul de încredere de 99% avem $x_{0.995, 83} = 52.7674$ și $x_{0.005, 83} = 118.726$. Intervalul de încredere pentru dispersie este $[89.0006, 200.251]$.

Exemplul 11.3.4 Media erorilor de măsurare a lungimilor unor baghete metalice este de 3 mm. Presupunem că aceste erori respectă legea normală cu media 3 mm și dispersia necunoscută. Se face o selecție de volum 6: $\{-1, 4, 4, 1, 3, 1\}$. Se cere un interval de estimare pentru dispersie cu nivel de încredere de 90%.

Rezolvare. Avem $n = 6$, $m = 3$. Calculăm

$$s^2 = \frac{1}{3} \left((-1-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2 + (1-3)^2 + (3-3)^2 + (1-3)^2 \right) = \frac{26}{3} = 8.6667$$

Considerăm statistica $\chi_5^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{5s^2}{\sigma^2}$.

Pentru nivelul de încredere de 90% avem $x_{0.95, 5} = 1.14548$ și $x_{0.05, 5} = 11.0705$.

Intervalul de încredere pentru dispersie este $[2.34858; 22.698]$.

Se observă că intervalul este destul de mare, deci precizia pentru dispersie este mică, chiar dacă apare cu probabilitate mare.

11.4 Intervale de încredere pentru proporții

Pentru o populație a cărei membrii pot fi clasificați în funcție de o anumită caracteristică în două categorii: fie p probabilitatea de a aparține unei categorii, numit succes și $1-p$ probabilitatea de a aparține celeilalte categorii, numită eșec. Parametrul p poartă denumirea de proporția populației și ipotezele asupra lui p se fac numărând succesele, $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ($\leq n$), unde

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Atunci $\hat{P} = \frac{X}{n}$ un estimator punctual al lui p . Reamintim că n și p sunt parametrii unei distribuții binomiale. Mai mult, statistica P urmează o distribuție normală cu media p și dispersia $\frac{p(1-p)}{n}$ dacă p nu este aproape de 0 sau 1 și dacă n este relativ mare.

Aceasta înseamnă că pentru a folosi această aproximare este necesar ca $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.

Teorema 11.4.1 *Dacă n este astfel încât $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, atunci*

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

urmează aproximativ o distribuție normală standard.

Pentru a construi un interval de încredere pentru p , observăm că

$$P(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

sau

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

unde $z_{\frac{\alpha}{2}} > 0$ astfel încât $\Phi(-z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$.

Această relație poate fi rearanjată astfel:

$$P\left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Cantitatea $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ se numește *eroarea standard* a estimatorului punctual \hat{P} . Deoarece marginile intervalului conțin p care este necunoscut, o soluție satisfăcătoare este înlocuirea sa cu \hat{P} . Astfel obținem

$$P\left(\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right) \simeq 1 - \alpha.$$

Aceasta conduce la determinarea unui interval de încredere cu nivelul de încredere de $(1 - \alpha)100\%$ și acesta este

$$\left[\hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}\right].$$

Exemplul 11.4.2 Se presupune ca la 85 de autoturisme de o anumită marcă se studiază arborele cotit după un anumit timp de funcționare. Se constată că la 10 automobile acesta prezenta defecte ce impunea înlocuirea lui. Să se determine un estimator punctual al numărului ce reprezintă ce proporție dintre automobilele de acest tip prezintă această deficiență. Să se interpreteze acest rezultat și să se estimeze ce proporție dintre automobilele de acest tip prezintă această deficiență.

Rezolvare. Pentru fiecare autoturism studiat, se obține rezultatul că arborele cotit este defect sau nu. Putem aplica modelul Bernoulli și estimatorul de verosimilitate maximă va fi:

$$\hat{P} = \frac{10}{85} = 0.117655.$$

Eroarea standard a estimatorului punctual este

$$\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{10}{85}(1-\frac{10}{85})}{85}} = 0.034946.$$

Nu este foarte clar cum interpretăm această valoare de 0.034946. Este această estimare foarte exactă, exactă sau nu?

Construim un interval de încredere cu un nivel de încredere de 95% bazat pe valoarea observată 0.117655.

$$\begin{aligned} \hat{P} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}} &\leq p \leq \hat{P} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}, \\ 0.1176 - 1.96 \sqrt{\frac{0.1176 \cdot 0.88}{85}} &\leq p \leq 0.1176 + 1.96 \sqrt{\frac{0.1176 \cdot 0.88}{85}}, \\ 0.04915 &\leq p \leq 0.186141. \end{aligned}$$

Concluzia: în 95% din cazuri probabilitatea ca automobilul să prezinte defectul studiat este cuprinsă în intervalul [0.0491534, 0.186141].