

Universitatea Tehnica a Moldovei  
Facultatea Calculatoare, Informatica si Microelectronica  
Departamentul Informatica si Ingineria Sistemelor

**Disciplina:**  
**Roboti Mobili si Microroboti**

**Tema 3. Modele de orientare in spatiu**

Titular de curs:  
Conf.univ.,dr. V. Ababii

Asistent:  
I.asistent, N. Roşca

# Subiecte abordate:

- \* Transformari geometrice in spatii 3D.
- \* Calculul coordonatelor in spatii 3D.

# Transformari geometrice 3D.

Transformarea geometrică în spațiul 3D se descrie ca:

$$P(x,y,z) \rightarrow P(x',y',z'),$$

unde  $x'=F_1(x,y,z)$ ,  $y'=F_2(x,y,z)$ ,  $z'=F_3(x,y,z)$

Transformările geometrice tridimensionale cuprind următoarele operații spațiale: translația, scalare, rotația, oglindirea, proiecția obiectelor 3D pe un plan.

În coordonate omogene, un punct din spațiu  $(x, y, z)$  se reprezintă prin vectorul  $[x_w \ y_w \ z_w \ w]$ ,

unde  $w$  este parametru real, iar  $x = x_w/w$ ,  $y = y_w/w$ ,  $z = z_w/w$ ,  $w \neq 0$ .

# Matricea de transformare 3D.

Matricea de transformare generalizată 4x4 pentru coordonate omogene 3D are următoarea formă:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b & c & p \\ d & e & f & q \\ l & m & n & s \end{vmatrix}$$

Transformarea geometrică în spațiul 3D în forma matricială se descrie în modul următor:

$$[x'y'z'1] = [x y z 1][ M ]$$

$[x y z 1]$  – sunt coordonatele initiale ale obiectului;

$[x'y'z'1]$  – sunt coordonatele noi ale obiectului;

$[ M ]$  – este operația aplicată asupra transformărilor spațiale.

# Translatarea spatiala 3D.

Dacă  $(x, y, z)$  sunt coordonatele unui punct  $P$  din spațiu, prin translație el este dus în punctul de coordonate  $(x', y', z')$ , unde:

$$x' = x + tx$$

$$y' = y + ty$$

$$z' = z + tz$$

sau, în formă matriceală:

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1] [T]$$

Matricea de translație 3D este:

$$|T| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{vmatrix}$$

# Scalarea in spatiul 3D.

Dacă  $(x, y, z)$  sunt coordonatele unui punct  $P$  din spațiu, prin scalare față de origine, el este transformat în punctul de coordonate  $(x', y', z')$ , unde:

$$x' = s_x * x$$

$$y' = s_y * y$$

$$z' = s_z * z$$

sau, în formă matriceală:

$$[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1][S]$$

Matricea de scalare locală este dată de relația:

$$|S| = \begin{vmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Scalare globală se obține folosind următoarea matrice:

$$|S_g| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{vmatrix}$$

# Rotatia în jurul unei axe a sistemului de coordonate.

În cazul rotației în jurul axei  $x$  cu unghiul  $\alpha$  matricea de transformare se descrie în mod următor:

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Într-o manieră asemănătoare matricea de rotație în jurul axei  $y$  cu unghiul  $\beta$  este:

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de rotație în jurul axei  $z$  cu unghiul  $\theta$  este:

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformari inverse in spatiul 3D.

Toate operatiile de transformare 3D au matricele de transformare inversa care asigura trecerea in pozitia initiala:

$$[T(t_x, t_y, t_z)]^{-1} = [T(-t_x, -t_y, -t_z)]$$

$$[S(s_x, s_y, s_z)]^{-1} = [S(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)]$$

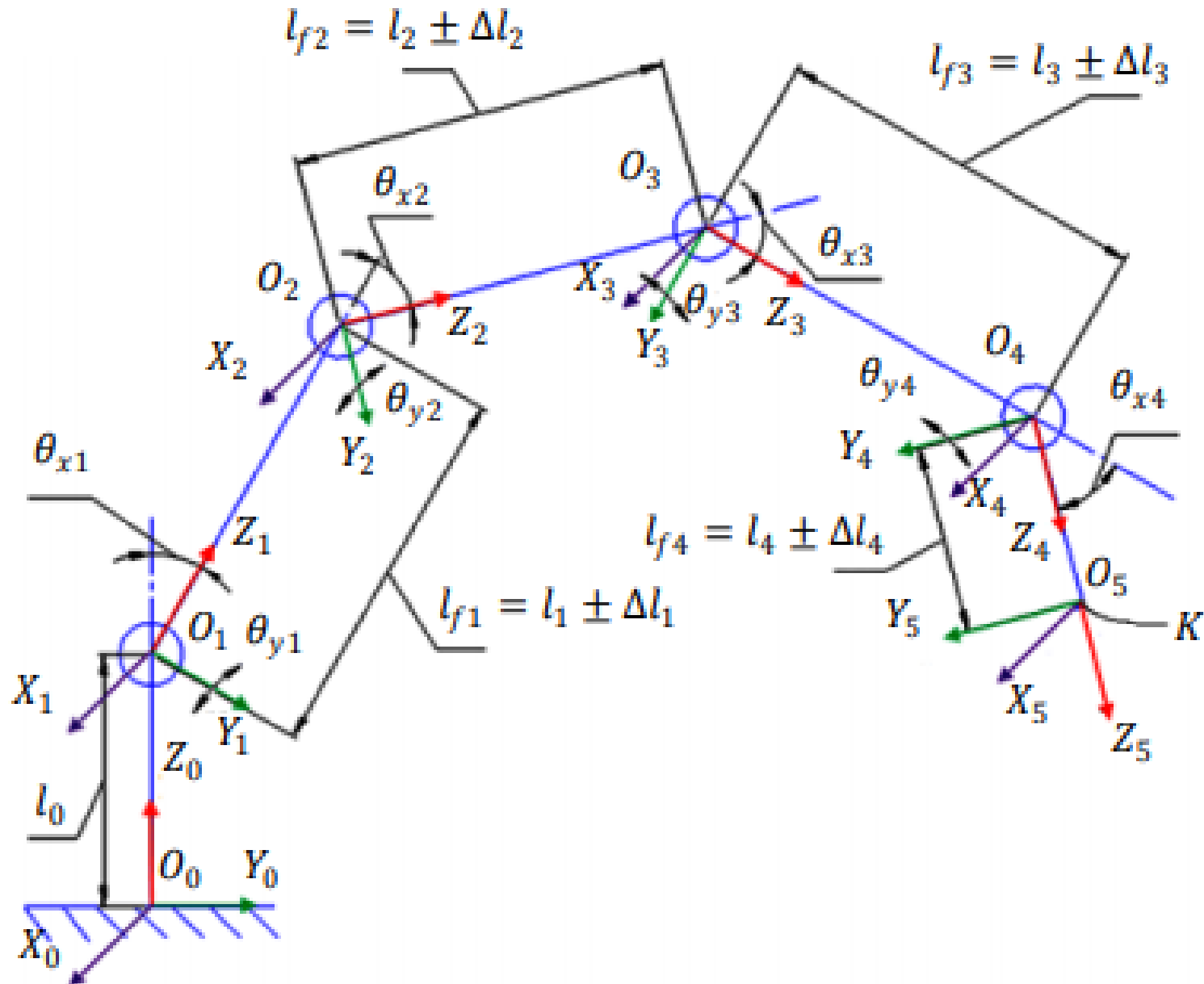
$$[R_x(\alpha)]^{-1} = [R_x(-\alpha)]$$

$$[R_y(\beta)]^{-1} = [R_y(-\beta)]$$

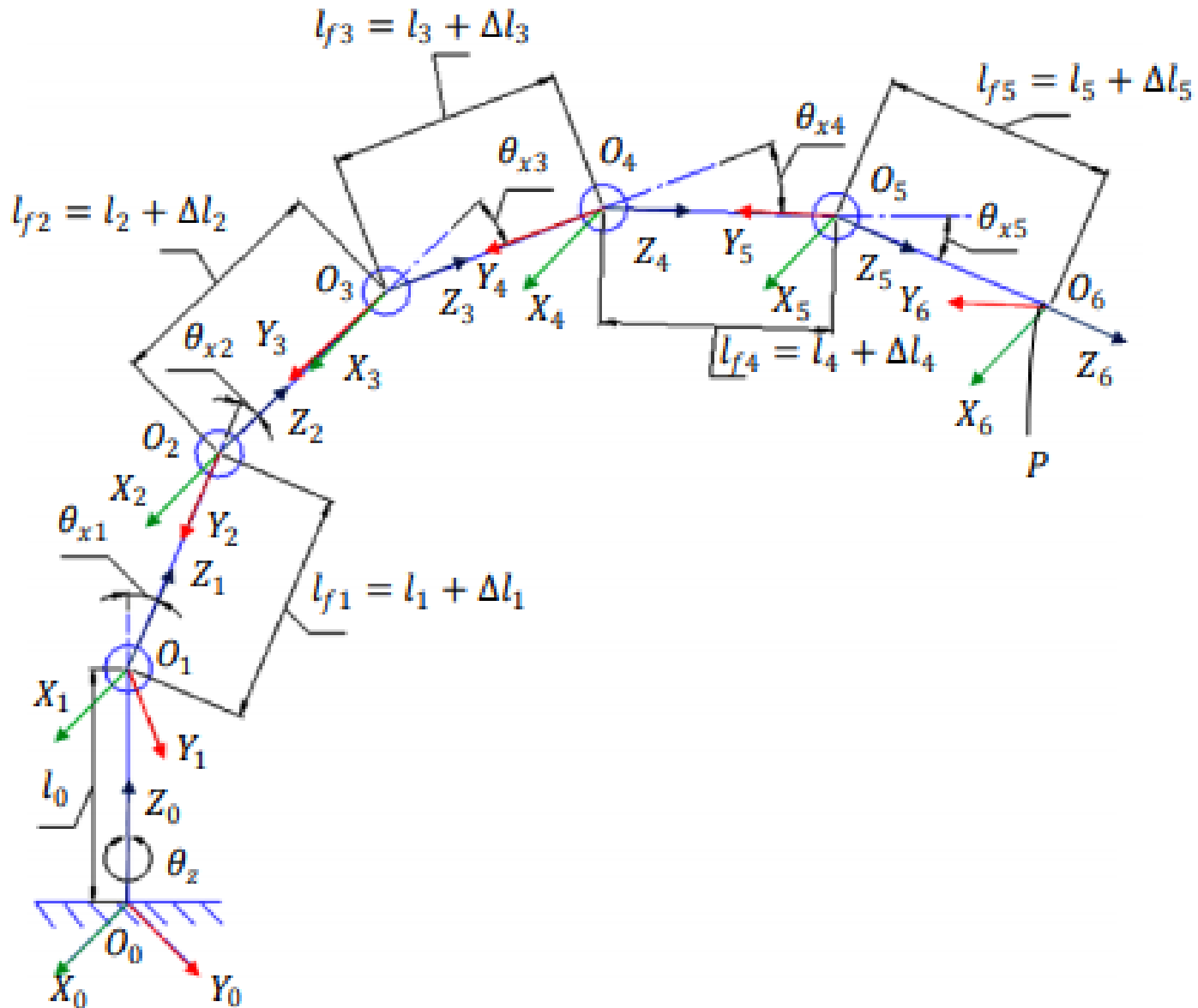
$$[R_z(\theta)]^{-1} = [R_z(-\theta)]$$



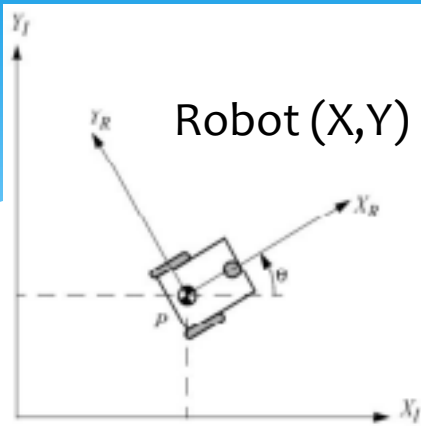
# Modelul geometric direct al bratului robotic cu 8 grade de mobilitate.



# Modelul geometric direct al bratului robotic cu 6 grade de mobilitate.



# Mobilitatea robotului pe roti



## Poziția unui punct

- În spațiul 2D:  $[x \ y \ 1]^T$
- În spațiul 3D:  $[x \ y \ z \ 1]^T$

## Poziția relativă la cadrul robotului

## Transformări între cadre

### ▪ Translație

- Multiplicarea poziției cu o matrice de tipul

$$\text{Trans}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ▪ Rotație

- Multiplicarea poziției cu o matrice de tipul

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### ▪ Translație și rotație

- Multiplicarea poziției cu o matrice de tip translație și cu o matrice de tip rotație

# Dinamica/Cinematica robotului pe roți

Mobilitatea unui robot  $\rightarrow$  Mișcarea efectivă  $\rightarrow$   
Cinematica roboților

## ■ Mișcare liniară

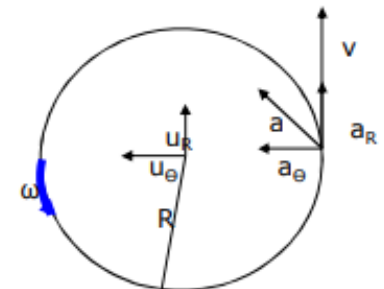
- Poziție  $r$
- Viteză  $v = dr/dt$
- Accelerație  $a = dv/dt$
- Relații pt mișcarea uniform accelerată:
  - $v(t) = v_0 + at$
  - $r(t) = r_0 + v_0t + at^2/2 = r_0 + (v + v_0)t/2$
  - $v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$

## ■ Mișcare de rotație

- Poziție – sub un unghi  $\Theta$  față de un sistem de referință
- Viteză (unghiulară)  $\omega = d\Theta/dt$
- Accelerație  $\alpha = d\omega/dt$
- Relații pt mișcarea de rotație uniform accelerată:
  - $\omega(t) = \omega_0 + at$
  - $\Theta(t) = \Theta_0 + \omega_0t + at^2/2 = (\omega + \omega_0)t/2$
  - $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Theta - \Theta_0)$

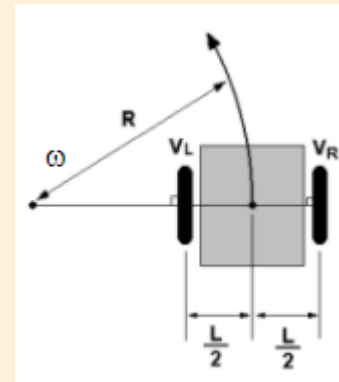
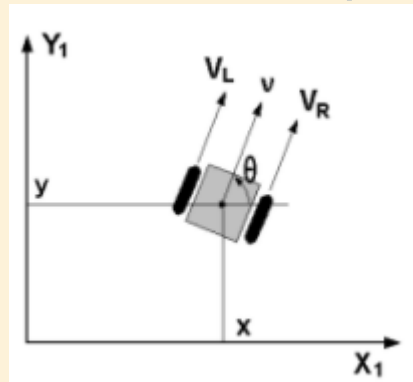
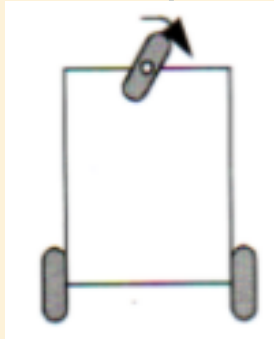
## ■ Mișcare circulară

- Poziția  $r(t) = Ru_R(t)$ ,  $R$  – raza cercului
- Viteza  $v(t) = R\omega(t)u_\Theta$ , unde  $\omega$  – viteza unghiulară
- Accelerația  $a(t) = a_\Theta(t) + a_R(t)$



# Exemplu. Exercițiu.

- \* Este dat robotul R cu 2 roți de tractiune. Diametrul roților este de 5 cm. Poziția Robotului în  $T_0(0,0)$ . Orientarea Robotului față de OX este 30 grade. Distanța dintre roți este de 10cm.
- \* 1. Să se calculeze pasul de deplasare a Robotului la rotația cu unghiul de 5 grade.
- \* 2. Să se calculeze pașii pentru a atinge poziția cu coordonatele (5, 4).
- \* 3 Să se optimizeze traseul de deplasare a Robotului mobil.



$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} (x,y) : \text{Poziția robotului} \\ \theta : \text{Orientarea robotului} \end{array}$$

$$U = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} v : \text{viteza liniară a robotului} \\ w : \text{viteza unghiulară a robotului} \\ \text{(nota: pentru fiecare roata)} \end{array}$$

# Lista de teme pentru Teza de licenta:

1. Sistem informational educational pentru copii;
2. Sistem pentru modelarea 3D a bratului robotic;
3. Sistem Multi-Robot cu colaborare Master-Slave;
4. Sistem pentru ghidarea unui set de Roboti Mobili in baza retelei Internet;
5. Sistem pentru ghidarea robotilor mobili in baza informatiei video;
6. Sistem interactiv Om-Robot in baza comenzilor vocale;
7. Sistem inteligent de comanda pentru colonii de Roboti Mobili;
8. Sistem pentru investigarea spatiilor 3D (Drona ghidata la distanta);



# Tema Nr. 3