Universitatea Tehnica a Moldovei
Facultatea Calculatoare, Informatica ;I Microelectronica
Departamentul Informatica si Ingineria Sistemelor

Disciplina:
Roboti Mobili si Microroboti

Tema 2. Spatii de activitate si transformari spatiale. Sisteme de coordonate.

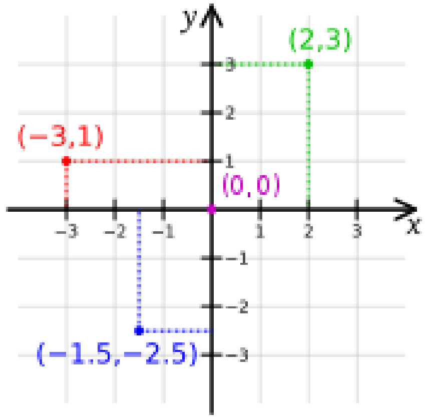
Titular de curs:
Conf.univ.,dr. V. Ababii
Asistent:
l.asistent, N. Roșca

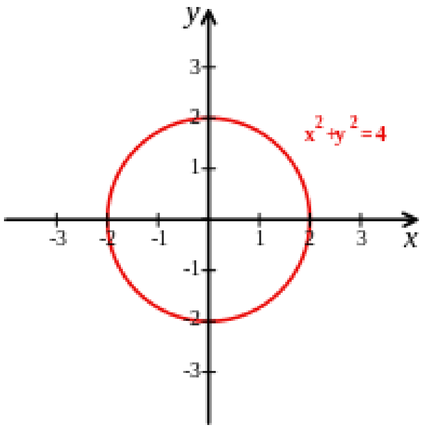
Subiecte abordate:

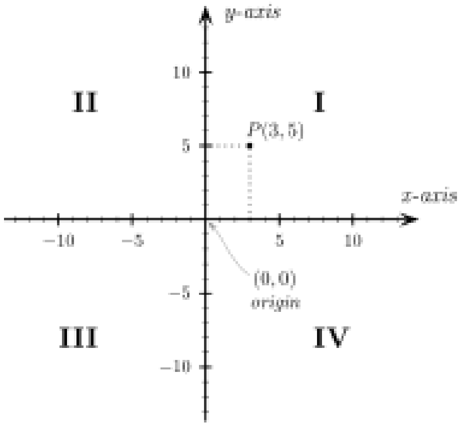
- Sisteme de coordonate.
- Spatii de activitate a Robotilor Mobili.
- Transformari spatiale pentru sisteme de Roboti Mobili.
- Calculul coordonatelor.

Sisteme de coordonate carteziene.

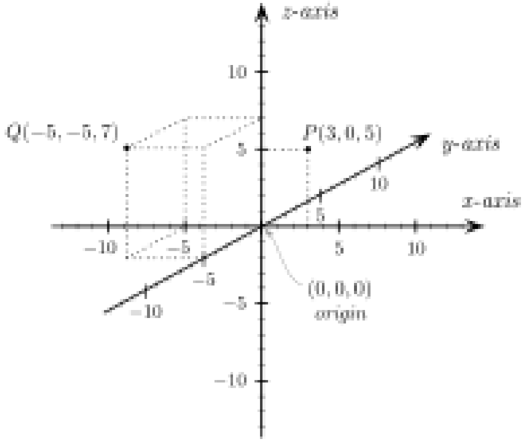
Sistemul de coordonate carteziene este folosit pentru a determina în mod unic un punct în plan prin două numere (coordonate x si y),

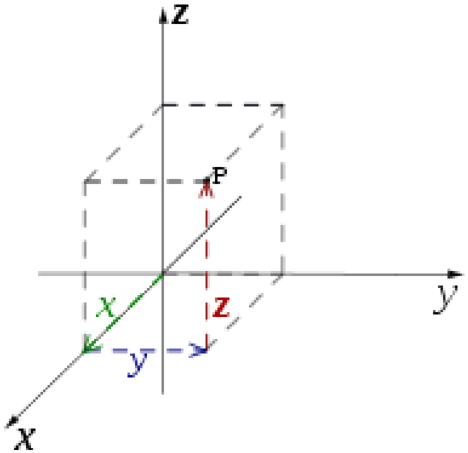






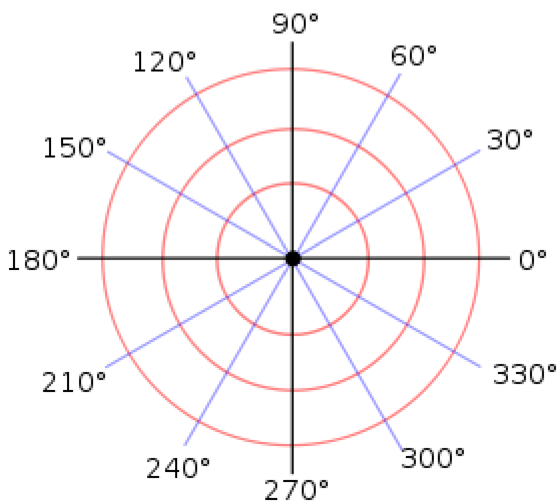
Sistemul de coordonate carteziene în trei dimensiuni furnizează cele trei dimensiuni fizice ale spațiului — lungime, lățime și înălțimile.

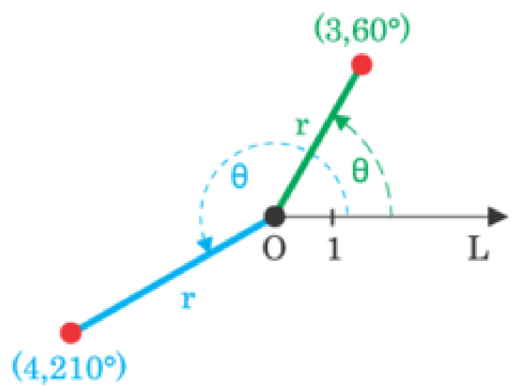




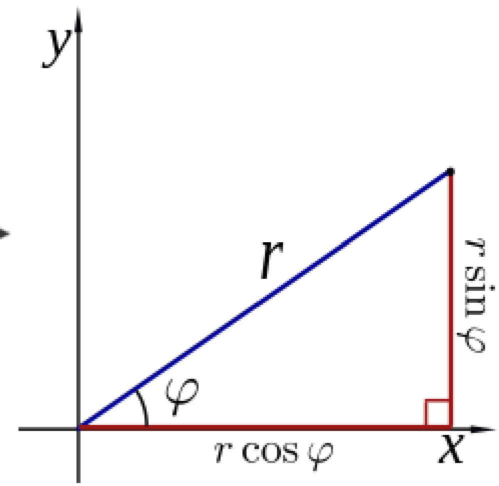
Sisteme de coordonate polare.

Sistemul de coordonate polare este un sistem de coordonate bidimensional în care fiecărui punct din plan i se asociază un unghi și o distanță. Sistemul coordonatelor polare este util mai ales în situații în care relația dintre două puncte este mai ușor de exprimat în termeni de distanțe și direcții (unghiuri); în sistemul cartezian sau ortogonal, o astfel de relație poate fi găsită doar cu ajutorul formulelor trigonometrice.





$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sisteme de coordonate polare.

Pentru a determina coordonata polară θ, trebuie să fie luate în considerare următoarele două idei:

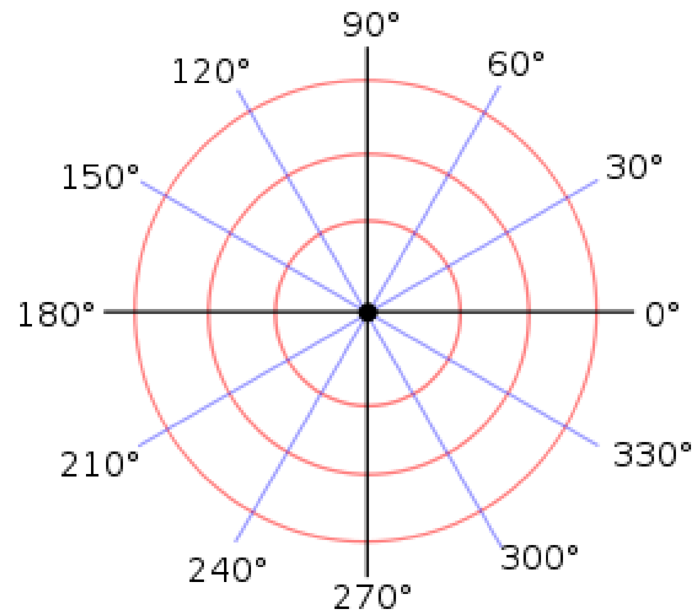
- Pentru $r = 0$, θ poate fi orice număr real.
- Pentru $r \neq 0$, pentru a obține o unică reprezentare a lui θ, aceasta trebuie limitată la un interval de lungime 2π. Alegeri convenționale pentru acest interval sunt $[0, 2\pi)$ și $(-\pi, \pi]$.

Pentru a obține θ în intervalul $[0, 2\pi)$, se poate folosi următoarea expresie ($\arctan$ reprezintă inversa funcției tangentă):

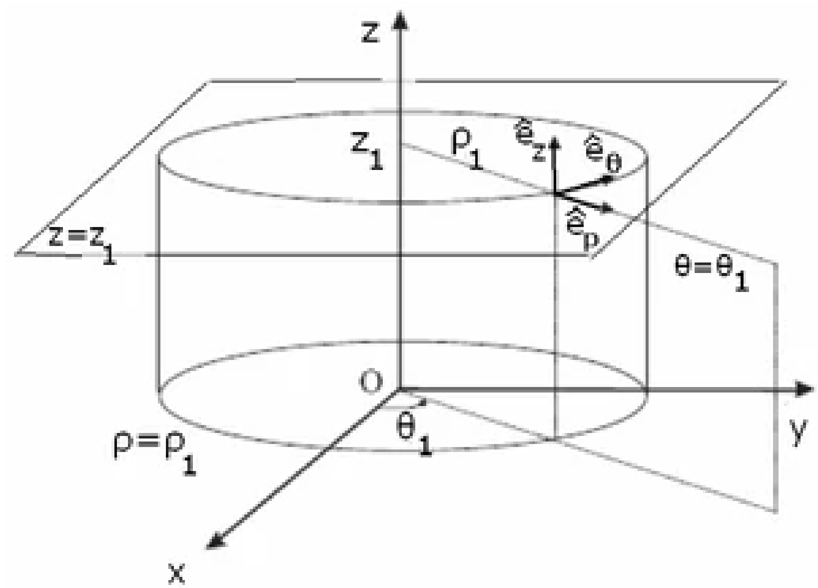
$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{daca } x > 0 \text{ si } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{daca } x > 0 \text{ si } y < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{daca } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca } x = 0 \text{ si } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{daca } x = 0 \text{ si } y < 0 \end{cases}$$

Pentru a obține θ în intervalul $(-\pi, \pi]$, se poate folosi următoarea expresie:[10]

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{daca } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{daca } x < 0 \text{ si } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{daca } x < 0 \text{ si } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{daca } x = 0 \text{ si } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{dacs } x = 0 \text{ si } y < 0 \end{cases}$$



Coordonate cilindrice.

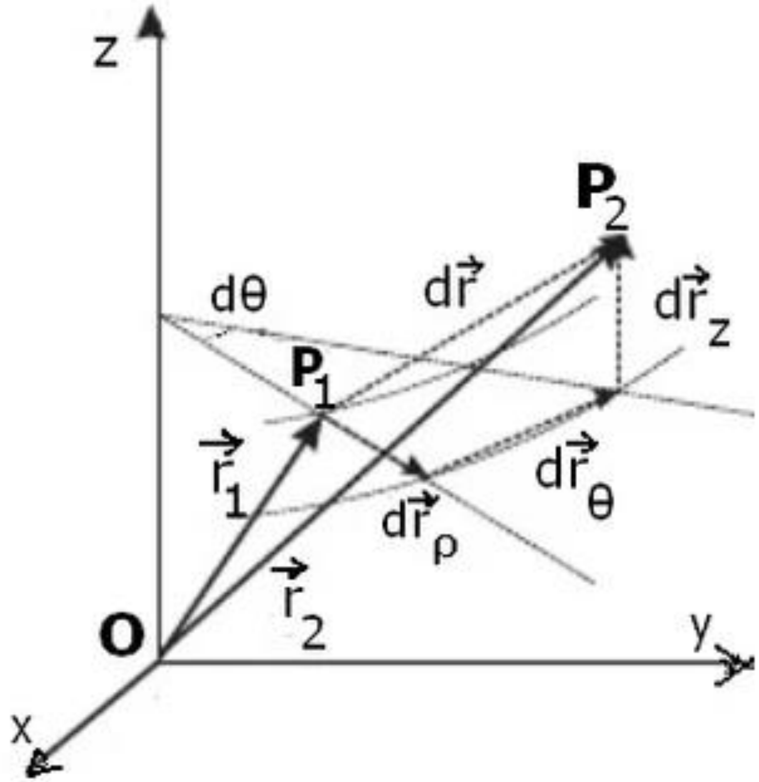


Sistemul de coordonate cilindrice (ρ, θ, z)

În sistemul de **coordonate cilindrice**, poziţia unui punct este precizată de coordonatele:

- $\rho \in [0, \infty)$- distanţa de la punctul **P** la axa **Oz**;
- $\theta \in [0, 2\pi)$- unghiul dintre direcţia ρşi axa **Ox**, denumit şi *unghi azimutal*
- $z \in (-\infty, +\infty)$.- distanţa de la punctul **P** la planul orizontal, **xOy**, denumită şi *cotă*.

Scopul aplicarii Robotilor mobili



O deplasare elementară a punctului (denumit *mobil* în mecanică) poate fi considerată ca o compunere a trei deplasări independente după direcţiile date de versorii sistemului de coordonate cilindrice:

$$d\vec{r} = d\overrightarrow{r_\rho} + d\overrightarrow{r_\theta} + d\overrightarrow{r_z}.$$

Aproximăm fiecare deplasare infinitezimală:

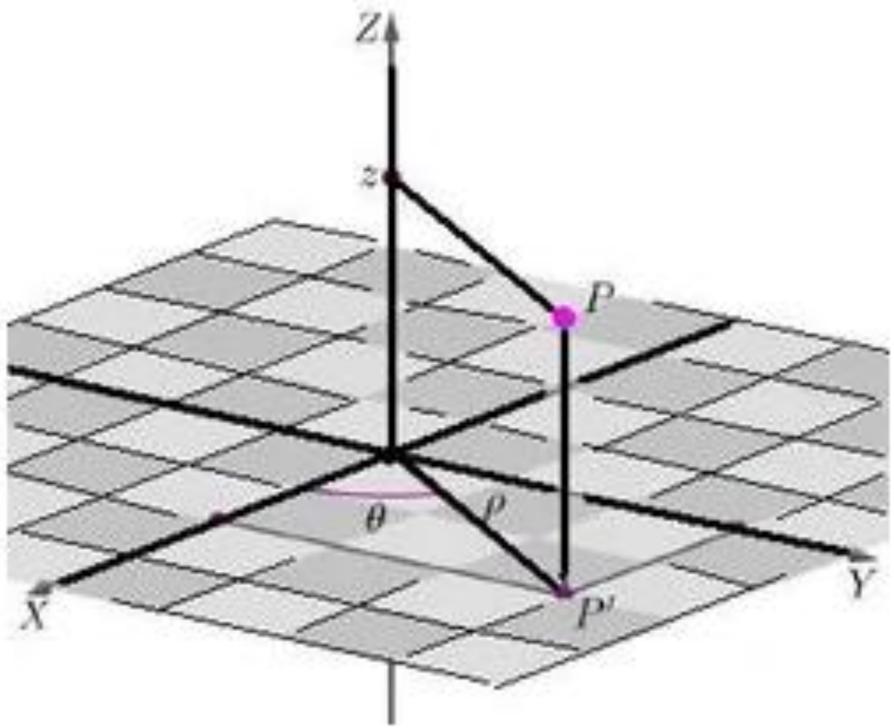
$$d\vec{r} = d\rho\hat{e}_\rho + \rho d\theta\hat{e}_\theta + dz\hat{e}_z.$$

Împărţind la intervalul de timp infinitezimal, obţinem expresia vitezei în coordonate cilindrice:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\,\hat{e}_\rho + \rho\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\,\hat{e}_z =$$

$$= \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{z}\hat{e}_z.$$

Legatura dintre coordonatele polare si carteziene.

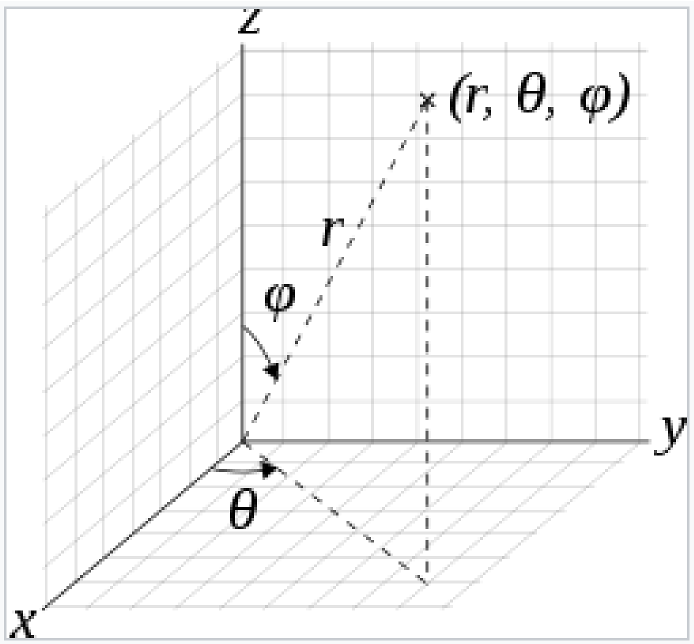


$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \sin \theta$$
$$z = z.$$

$$\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos \theta = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\sin \theta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x} .$$

Coordonate sferice.

Sistemul de coordonate sferice este un sistem de coordonate pentru reprezentarea figurilor geometrice în trei dimensiuni folosind trei coordonate: distanța radială dintre un punct și o origine fixată, unghiul zenit față de axa pozitivă z și unghiul azimut față de axa pozitivă x.



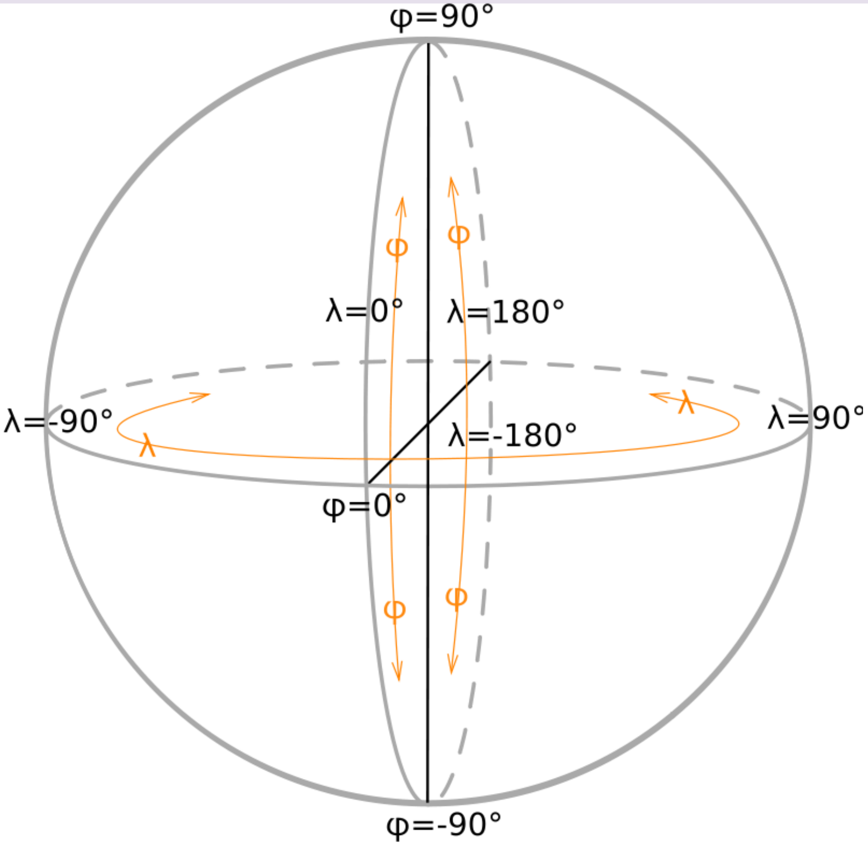
Există mai multe convenții pentru reprezentarea acestor coordonate, dar cea mai des întâlnită folosește simbolurile ρ, φ și ϑ, unde ρ reprezintă distanța radială, φ reprezintă unghiul zenit, iar ϑ reprezintă unghiul azimut.

Sunt utilizate diferite siteme de coordonate sferice care utilizează notații diferite față de convențiile din matematică sau fizică.

Spre exemplu, un sistem de coordonate geografice folosește pentru determinarea poziției latitudinea, longitudinea și altitudinea. Acesta servește la determinarea unghiurilor laterale ale suprafeței terestre (sau mai general ale unui sferoid) fiind astfel împărțit în 360° (grade) latitudine și 180° (grade) longitudine.

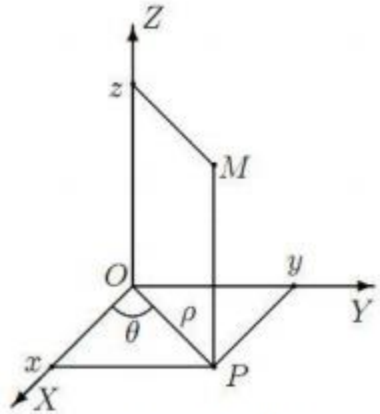
Coordonate deografice.

Sistemul de **coordonate geografice** este un sistem de referință care utilizează coordonatele unghiulare, latitudine (nordică sau sudică) și longitudine (estică și vestică) și servește la determinarea unghiurilor laterale ale suprafeței terestre (sau mai general ale unui sferoid). Globul este împărțit în 180° (grade) latitudine și 360° (grade) longitudine.

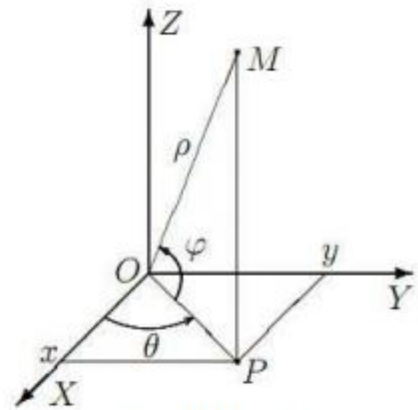


Raportul dintre coordonatele cilindrice si sferice.

$\rho, \theta, z,$



Coordonatele cilindrice



Coordonatele sferice

$\rho, \theta, \varphi.$

Legatura dintre coordonatele carteziene si cele cilindrice este:

$$x = \rho \cos\theta, \; y = \rho \sin\theta, \; z = z.$$

Legatura dintre coordonatele carteziene si cele sferice este:

$$x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \; y = \rho \cos\varphi \sin\theta, \; z = \rho \sin\varphi.$$

Transformari geometrice.

Transformările grafice sunt operaţii geometrice liniare sau neliniare, având ca operanzi formele grafice.

Cele mai uzitate tipuri de transformări grafice sunt:

- transformări bidimensionale
- transformări tridimensionale

Transformările bidimensionale sunt operaţii de trecere între spaţii de dimensiune 2.

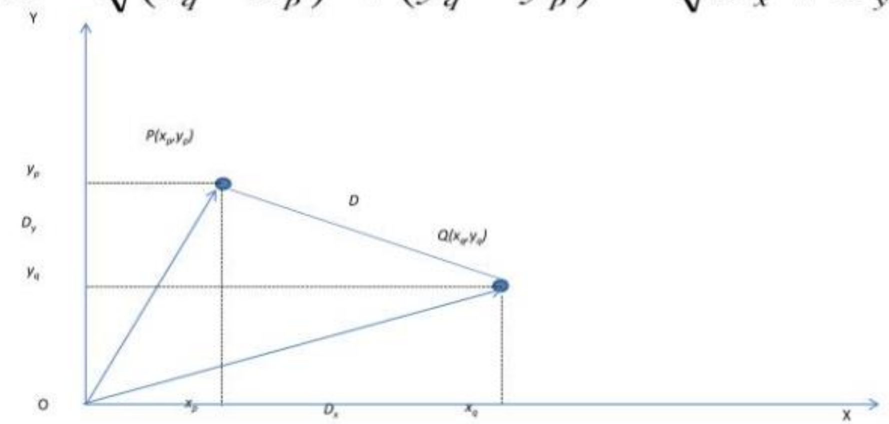
Cele mai cunoscute tipuri de transformări grafice bidimensionale sunt:

- ***translarea***
- ***rotaţia***
- ***scalarea***
- ***oglindirea***
- ***forfecarea***

Translarea se defineşte ca fiind transformarea grafică pentru care orice punct al formei suferă o deplasare liniară global definită.
Translarea este o transformare grafică ce lasă nemodificate distanțele între punctele unei forme grafice. Acestă caracteristică este specifică corpurilor fizice solide (nedeformabile) și de aceea o vom numi *caracteristică de corp solid*. Reformulând, putem spune că transformarea grafică numită *translare* prezintă *caracteristica de corp solid*.
Operația de *translare* poate fi definită cel puțin din două puncte de vedere: ALFA şi BETA.

Fie punctul *P* de coordonate (x_p, y_p) și punctul *Q* de coordonate (x_q, y_q). Distanța între aceste două puncte este definită ca fiind:

$$D = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$



Deplasarea geometrica.

Deplasarea geometrică a punctului grafic, din poziția P în poziția Q, echivalează cu parcurgerea de către acesta a distanței D, sau – ceea ce este echivalent, cu parcurgerea de către proiecția x a distanței D_x și de către proiecția y a distanței D_y. În format analitic, acest lucru se scrie:

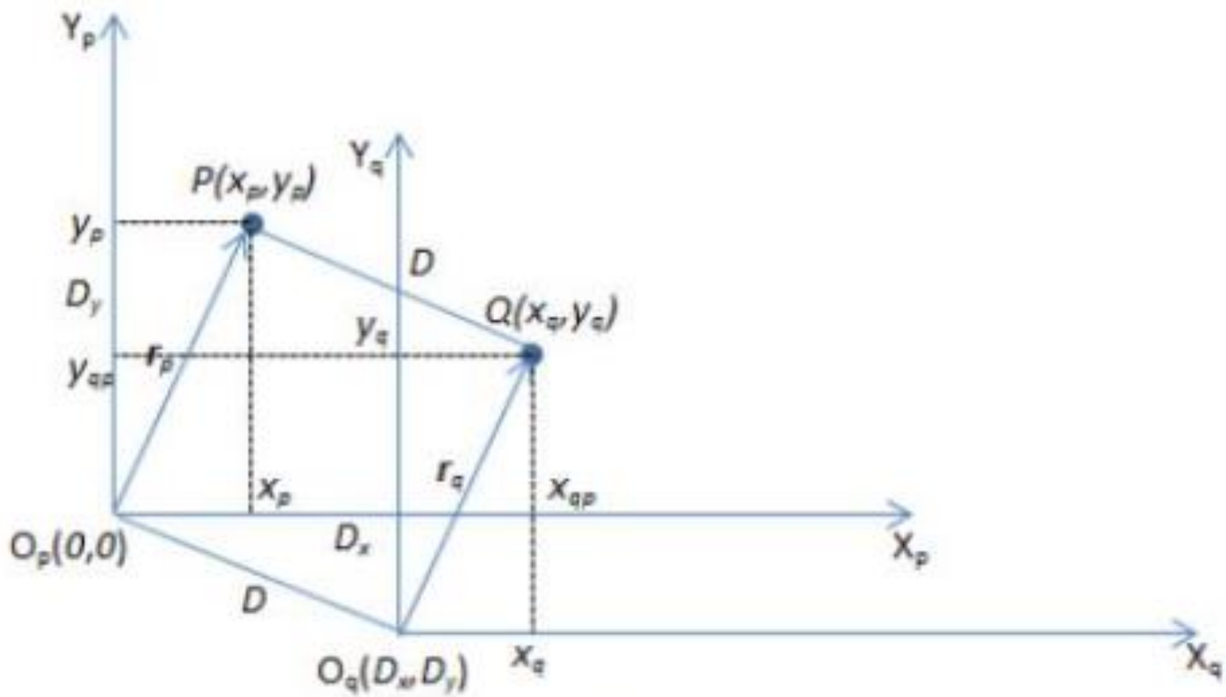
$$\begin{cases} x_q = x_p + D_x \\ y_q = y_p + D_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$$

unde: $\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$ sunt vectorii de poziție ai punctelor Q și P, iar $\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$ notează vectorul deplasare $\overrightarrow{PQ}$.

Translatarea 2D.

Fie reperele $X_pO_pY_p$ și $X_qO_qY_q$, ortogonale drepte. Translarea punctului curent din P în Q este interpretată în acest caz ca o transformare de coordonate, de la (x_p,y_p) la (x_q,y_q), adică o deplasare a referențialului $X_qO_qY_q$ față de $X_pO_pY_p$ cu distanța D.



Translatarea 2D.

$$\begin{bmatrix} x_{qp} \\ y_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$$

sau, dacă se face referire la originea $O_p(0,0)$:

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$$

Se regăsesc astfel relațiile (2). În concluzie, cele două moduri distincte de interpretare a translării sunt echivalente din punct de vedere analitic.

În scriere vectorială, operația de translare corespunde acțiunii vectorului:

$$\boldsymbol{d} = t_x \hat{x} + t_y \hat{y} \tag{3}$$

unde $\hat{x}$ și $\hat{y}$ sunt versorii celor două axe. Coeficienții din relația de mai sus se definesc astfel:

$$t_x = D_x \,;\, t_y = D_y$$

Scalarea 2D

Scalarea unui punct $P(x,y)$ cu factorii s_x și s_y față de origine, semnifică scalarea vectorului de poziție $\overline{OP}(x,y)$. Vectorul rezultat în urma scalării, notat $\overline{OP'}(x',y')$, are componentele x', y' exprimate ca:

$$\begin{cases} x' = x s_x \\ y' = y s_y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{S r}$$

Rotatia 2D.

Este transformarea grafică ce prezintă simetrie unghiulară, conservând distanțele dintre puncte. Operația de rotație este specificată printr-un scalar numit *unghi de rotație*. Dacă unghiul de rotație este pozitiv, se consideră că rotația s-a efectuat în sens trigonometric. În caz contrar, rotația se efectuează în sens orar.

Calculul punctului $P'(x',y')$ obținut în urma rotației cu unghiul φ a punctului P în jurul originii, devine mult mai simplu dacă se exprimă relația dintre coordonatele carteziene și cele polare ale lui P, respectiv P':

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r\cos(t+\varphi) \\ y' = r\sin(t+\varphi) \end{cases}$$

Rotatia 2D.

După transformările trigonometrice specifice sumei de argument, obţinem:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

Expresia matriceal-vectorială corespondentă este:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Lista de teme pentru Teza de licenta:

1. Sistem informational educational pentru copii;
2. Sistem pentru modelarea 3D a bratului robotic;
3. Sistem Multi-Robot cu colaborare Master-Slave;
4. Sistem pentru ghidarea unui set de Roboti Mobili in baza retelei Internet;
5. Sistem pentru ghidarea robotilor mobili in baza informatiei video;
6. Sistem interactiv Om-Robot in baza comenzilor vocale;
7. Sistem inteligent de comanda pentru colonii de Roboti Mobili;

Tema Nr. 2